Université de Lorraine, UFR MIM
Master de Mathématiques, M2-MFA, 2014-2015
Equations de la mécanique des fluides

Feuille 3

1- Equation de transport à vitesse variable
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + 2tu_x = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

où $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$.
a) Déterminer le pied de la caractéristique passant par le point (x,t), $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.
b) En déduire l'unicité de $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ solution de (8), puis l'existence d'une telle solution.
c) Montrer l'existence et l'unicité de $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ solution de

$$\begin{cases} u_t + 2tu_x = 1 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

2- Equations de transport linéaires

Résoudre les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + xtu_x = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_t + xtu_x = f(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} u_x - yu_y - u = 1 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = u_0(y) \end{cases} \tag{5}$$

où $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.

3- Equation de Burgers
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{6}$$

1) On prend ici $u_0(x) = e^{-x^2}$.
a) Ecrire l'équation des caractéristiques issues d'un point ξ de l'axe des x. Les dessiner.
b) Montrer que (6) possède une unique solution C^1, non prolongeable, dans l'ensemble $\{(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ 0 \leq t < T^*\}$ (On déterminera T^*).
2) On suppose que

$$u_0(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si} x \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

a) Montrer que (6) possède alors une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. La déterminer par la méthode des caractéristiques.
b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$ (on pourra, pour x fixé, étudier la fonction $t \mapsto \xi(t) =$ pied de la caractéristique issue de (x,t)).
3) Cette question est indépendante des précédentes. On considère le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) + e^u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array} \right. \tag{8}$$

où $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, u_0 bornée ainsi que sa dérivée, u_0 croissante.
a) Calculer (en justifiant) la solution de (8) le long de la caractéristique issue de $\xi \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que, quand $t \to +\infty$,

$$u(x,t) = -\text{Log}\, t + O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{9}$$

uniformément en $x \in \mathbb{R}$.

4- Loi de conservation oscillante
On considère le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \cos kt \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{array} \right. \tag{10}$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^2(\mathbb{R}),\ f'' > 0$. On suppose que $u_0 \in C^1(\mathbb{R}),\ u_0$ bornée ainsi que sa dérivée, et on pose $c(u) = f'(u)$.
1) On suppose que u est solution C^1 dans la bande $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T[$. Ecrire l'équation de la caractéristique issue d'un point d'abscisse ξ de l'axe réel.
2) Démontrer soigneusement que pour k assez grand, (10) possède une unique solution u_k, C^1 dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (on justifiera toutes ces assertions).
3) Dans les conditions de 2), on note $\xi_k(x,t)$ l'abscisse du point où la caractéristique issue de $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ coupe l'axe des x.
a) Montrer qu'il existe $M > 0$ (indépendant de k, x, t) telle que $|x - \xi_k(x,t)| \leq \frac{M}{k}$.
b) Montrer que $\sup_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}} |u_k(x,t) - u_0(x)| \to 0$ quand $k \to +\infty$..
4) Montrer que pour toute fonction $u(x,t) \in C^1(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$, la fonction définie par $(x,t) \mapsto \cos kt \frac{\partial}{\partial x} f(u)$ tend vers 0 au sens des distributions dans $\mathbb{R}\times]0,\infty,[$, lorsque k tend vers $+\infty$.

Les questions qui suivent sont indépendantes des précédentes.
5) Ecrire la définition d'une solution faible de (C_k) dans la bande $\mathbb{R} \times [0,T[$ pour $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.
6) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ séparé en deux composantes connexes Ω_+, Ω_- par une courbe Γ, C^1, paramétrée par t,

$$\Gamma = \{(X(t),t), t \in]t_1,t_2[\}. \tag{11}$$

Soit u la fonction définie dans Ω par

$$u_{|\Omega_+} = u_+, \quad u_{|\Omega_-} = u_- \tag{12}$$

où u_+, u_- sont deux constantes différentes.
En s'inspirant de la démonstration du Théorème de Rankine-Hugoniot, écrire la relation liant $u_+, u_-, X(t)$ et f pour que u soit solution faible de $(C_k)_1$ dans Ω. Dessiner les courbes $t \mapsto X(t)$ dans le cas $f(u) = u^2/2$.